

渦巻き錯視のメカニズム

立命館大学文学部助教授 北岡明佳

錯視（目の錯覚）にはいろいろ種類があるが、その中に渦巻き錯視（spiral illusion）というものがある。それは、同心円（中心が同じで大きさの異なる複数の円の集まり）が渦巻きに見えるという錯視である。図1はその例で、渦巻き錯視が初めて示された1908年のフレーザーの論文に掲載された図を、筆者がパソコンで作直したものである。この図では、「ねじれ紐」でできた同心円が、時計回りに回転して中心に向かう渦巻きに見える。

この渦巻き錯視は、フレーザー錯視という傾き錯視の応用である。フレーザー錯視とは図2のようなもので、1つひとつの線分の傾きと同じ方位に全体が傾いて見える錯視である。フレーザーの論文以降、約百年間、渦巻き錯視と言えばフレーザー錯視による渦巻き錯視のことであり、渦巻き錯視をそのままフレーザー錯視と呼ぶ研究者も少なくなかった。

ところが、2001年に我々（筆者とピンナとブルスタッフ）は、いかなる傾き錯視でも渦巻き錯視を作り出すことができることを明らかにした。例えば、図3はカフェウォール錯視による渦巻き錯視である。カフェウォール錯視とは、図4のように、ずれた白と黒の正方形の列の境界に灰色の線を引くと、それが傾いて見える錯視である。渦巻き錯視は、図1や3のような実線による同心円だけでなく、ドットの同心円配置パターンでも起こる（図5）。

我々の論文では渦巻き錯視の例を多数提示しただけでなく、渦巻き錯視のメカニズムについての仮説も提唱している。簡潔に言うと、人間の脳の高次視覚野には渦巻きパターンに特異的に応答す

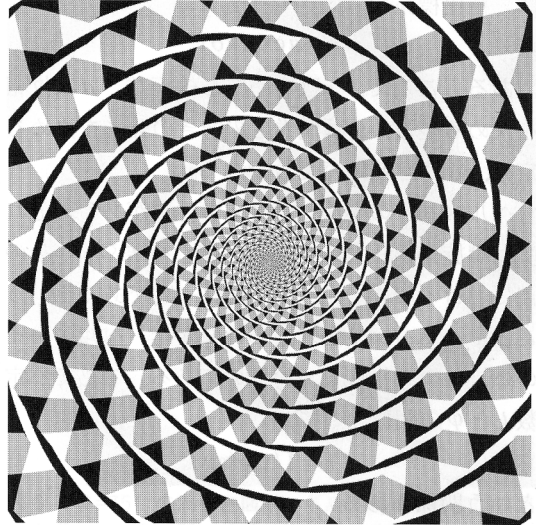


図1 フレーザーの渦巻き錯視。「ねじれ紐」の同心円が、時計回りに回転して中心に向かう渦巻きに見える。

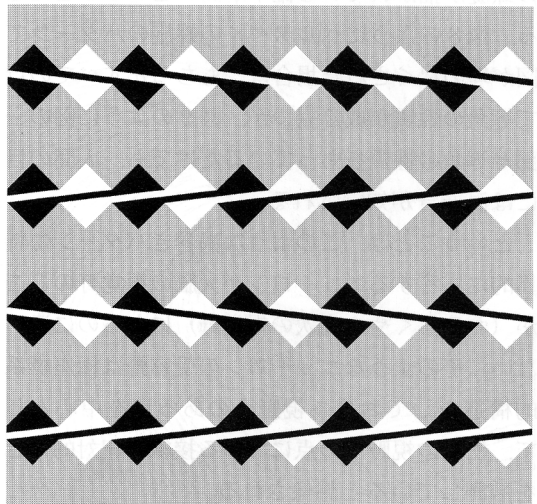


図2 フレーザー錯視。ねじれ紐錯視ともいう。例えば、一番上の列の各線分は右に傾いているが、それらの線分を水平に並べて構成された「ねじれ紐」全体は右下がりに見える。2番目の列は右上がり、3番目は右下がり、一番下は右上がりに見える。

るニューロンがあって、この渦巻きニューロンが同心円を渦巻きと間違えて応答することによって起こる錯視が渦巻き錯視ではないかと考えるのである。

ここで言う渦巻きとは、数学的にはベルヌーイ螺旋のことである。この螺旋は等比的に同型であるので対数螺旋とも呼ばれ、後述の重要な性質から等角螺旋とも呼ばれる。ベルヌーイ螺旋の数式は、極座標系では、

$$r = a \exp(k\theta)$$

である。ここで、 r は中心からの距離、 a は位相を決める定数、 k は渦巻きの巻きの強さを決める定数、 θ は回転角で変数である。

ベルヌーイの螺旋には特有の性質がある。それは、螺旋上の任意のある点と中心を結ぶ線がその点における接線と成す角(φ)は一定であるということである(図7)。この性質から、ベルヌーイの螺旋は等角螺旋ともいうのである。ここで、定数 k と φ の間に

$$k = 1 / \tan(\varphi)$$

という関係がある。

逆に言うと、ある図形において、複数の点において φ が一定である時、その図形にはベルヌーイの螺旋が描かれている確率が高いということになる。図8のようにベルヌーイの螺旋のパターンで図が埋め尽くされた場合は、もちろんすべての点で等角の性質が成り立つが、図9のように図の一部が等角の性質をもっているだけでも、人間の目には渦巻きが知覚される。

ということは、このような渦巻きパターンに特異的に応答するニューロンが脳の視覚野のどこか(おそらくやや高次の視覚野)にあるのに違いない。そのようなニューロンの受容野は極座標系的構造をしており、視野上のある点を中心として、任意の視野上の点における接線の相対的傾きを計測していると想像される。

同心円は、等角螺旋の数学を拡張すれば、 $\varphi = 90^\circ$ の場合である。つまり、同心円とは、その任意の点において、その点と中心を結ぶ線がその点における接線と垂直に交わっているパターンであ

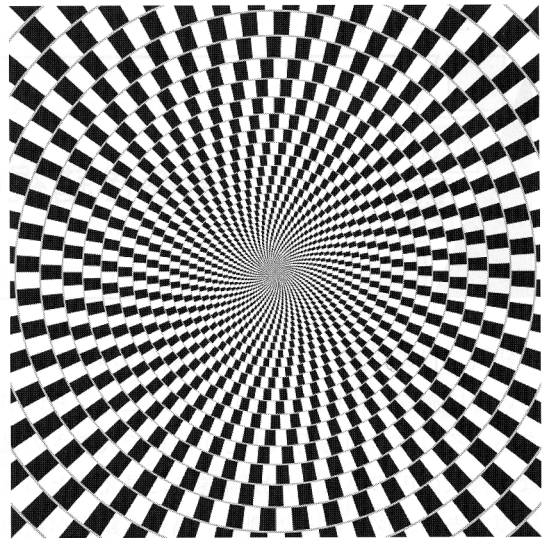


図3 カフェウォール錯視による渦巻き錯視。灰色の同心円が時計回りに回転して中心に向かう渦巻きに見える。

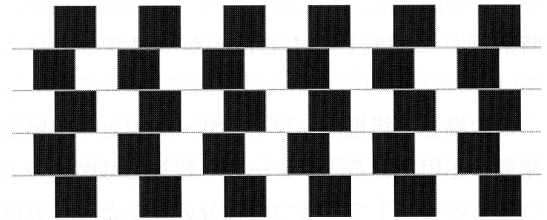


図4 カフェウォール錯視。4本の灰色の線は水平で互い平行であるが、上から右・左・右・左に傾いて見える。

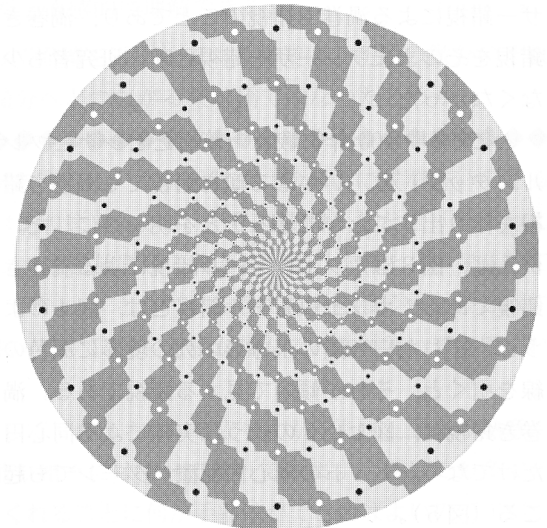


図5 筆者作「冬将軍」。同心円配置のドットが、反時計回りに回転して中心に向かう渦巻きに見える。

る。

ここで、もし何らかの理由でそれらの接線が一定の方向に傾いて見えたとしたらどうであろうか。仮に 10° 傾いて見えたのなら、ここで、もし何らかの理由でそれらの接線が $\varphi=80^\circ$ の渦巻きが見えることになる。その何らかの理由が傾き錯視である場合には渦巻き錯視が生じる、という考

え方が我々の提起した仮説である。つまり、人間の脳の高次視覚野には渦巻きパターンに特異的に応答するニューロンがあって、渦巻き錯視はこの渦巻きニューロンが同心円を渦巻きと間違えて応答することによって起こる、と考えるのである。

2001年に我々が提唱したこの仮説は、今のところ反論を受けていない。

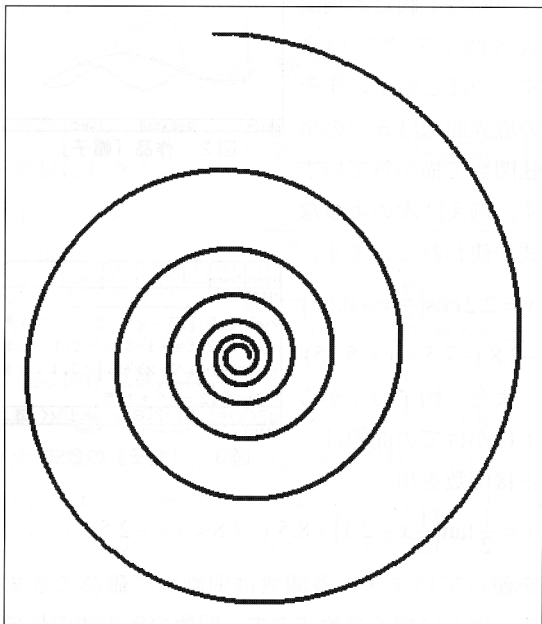


図6 ベルヌーイの螺旋の例。貝殻、星雲、台風などの自然物に見られる美しい形である。

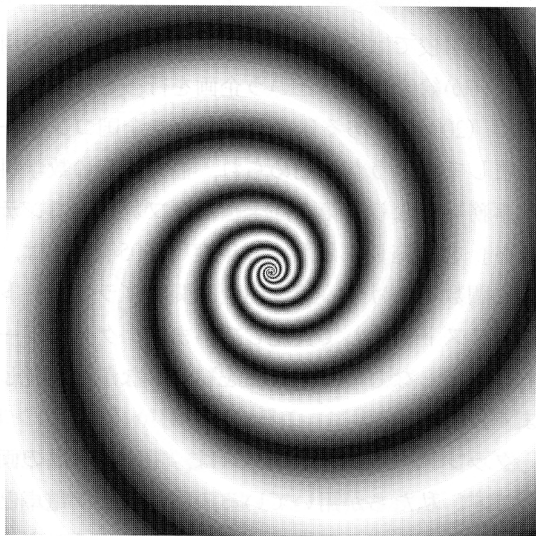


図8 $\varphi=75^\circ$ の渦巻き図形。ベルヌーイの螺旋は白黒3本ずつで、その間にサイン波状の明るさ変調をかけてある。この図では、任意の点で $\varphi=75^\circ$ が成立する。

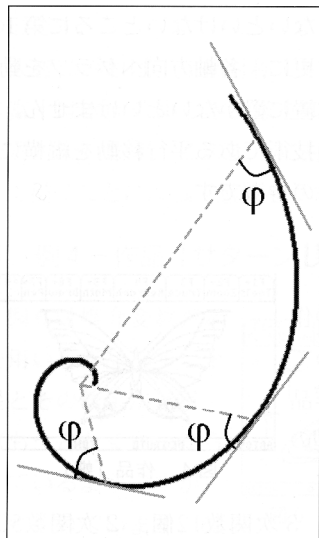


図7 ベルヌーイ螺旋においては、中心から各点までを結んだ線と、その点における接線の成す角度はどこでも等しい。

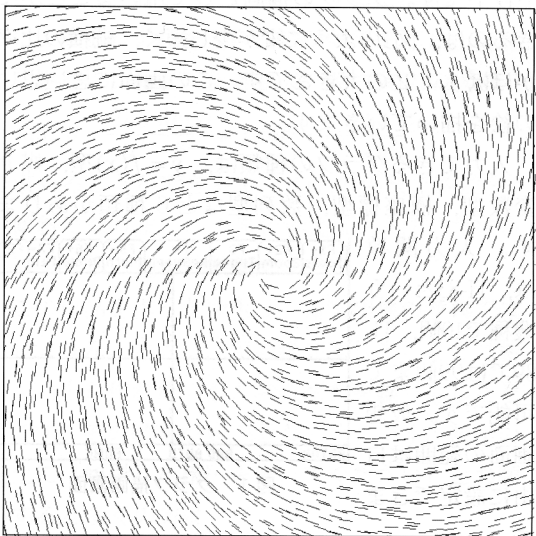


図9 $\varphi=60^\circ$ の渦巻き図形。螺旋は連続ではないが、全体としては渦巻きに見える。



じつきょう

数学資料

No. 52

東京理科大学 数学教育研究所の取り組みについて

東京理科大学 数学教育研究所長 澤田利夫

1. 数学教育研究所とは

大学の中に開設した全国初の「数学教育研究所」について紹介します。

2006年6月で創立125周年を迎える東京理科大学は、創立以来、中学・高等学校（以下中等学校という）の数学教員を多数社会に送り出してきました。最近の例をみても、毎年100名をこす卒業生を中等学校等の数学科教員として全国に送り出しております。

昨年10月、東京理科大学総合研究機構の中に、理学の普及に努めてきた本学の特性を生かした数学教育研究部門（対外的には「数学教育研究所」と呼ぶ）が設立されました。それは、大学と中等学校との接続を円滑にするためのものです。本研究所は、中等学校の現職数学教員と本学教員の数学教育に関する情報交換の場となり、共同研究を通して教育方法の調査研究及び教材の開発や数学の学力調査などを行い、その成果を中等学校等に

提供するとともに大学初年時教育に役立て、我が国の数学教育の発展に寄与することを目的として設立されました。

本学は理工系総合大学として、中等学校教育に対しては、主にその教科教育の側面からの貢献が求められていると思われます。したがって、それに応えるためには現職中等学校教員との共同研究・共同作業、そしてそのための情報交換が不可欠であります。幸運なことに、本学はこれまで多くの数学・理科の教員を輩出してきており、全国に広がったその人的ネットワークを大いに活用することが期待できます。その意味で、教育研究の情報発信および同窓との情報交換の場としての拠点となる「数学教育研究所」が、交通の便の良い東京理科大学神楽坂地区に設立されたのであります。

本研究所の当面の活動組織としては、「教育・教材研究班」と「教育データ班」及び「企画運営班」から成り立っています。これらの実際の活動

もくじ

論説

東京理科大学 数学教育研究所の取り組みについて… 1

QandA

数学の素朴な疑問…………… 4

報告

PAという方法 その意義…………… 7

高校生ラボ

2次近似式を図で示そう…………… 11

研究

渦巻き錯視のメカニズム…………… 13

実践記録

関数グラフアートが示す学生・生徒の創造性… 16

談話室

諸富祥彦さん…………… 19

ワンポイント教材

奇数からなる群数列…………… 20